

非线性系统闭环 PD 型迭代学习收敛性分析

惠阿丽¹, 郑建明², 孙 瑜¹

(1. 西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072; 2. 西安理工大学 机仪学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 提出并证明了非线性系统采用闭环 PD 型学习律时迭代学习控制的收敛充分条件、必要条件和充分必要条件, 并指出其收敛性仅与 D 型学习增益有关, 而与 P 型学习律的学习增益无关, 且收敛性与状态方程的具体形式无关。

关键词: 迭代学习; 收敛性; 非线性系统; 闭环 PD 型学习律

中图分类号: TP13

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2006)02-0042-06

引言

本文研究采用闭环 PD 型学习律时迭代学习控制的收敛性。所研究的动态方程^[1+2]为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

在第 k 次运行时, 系统的动态方程表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}_k(t), \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}_k(t), \end{cases} \quad (2)$$

输出误差为

$$\mathbf{e}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t), \quad (3)$$

闭环 PD 型学习律为

$$\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_k(t) + \Gamma_P \dot{\mathbf{e}}_{k+1}(t) + \Gamma_D \mathbf{e}_{k+1}(t). \quad (4)$$

令

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_k(t), \\ \delta \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_k(t), \\ \delta \mathbf{u}_k(t) = \mathbf{u}_d(t) - \mathbf{u}_k(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m+1}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{r+1}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为适当维数的向量或矩阵, $\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d, \mathbf{y}_d$ 为期望轨迹上的状态、控制和输出, Γ_P 为 P 型学习增益, Γ_D 为 D 型学习增益。

若被控对象式(1)的结构与参数均未知, 要求在时间 $t \in [t_0, T]$ 内系统输出 $\mathbf{y}(t)$ 精确地跟踪期望输出 $\mathbf{y}_d(t)$ 。闭环 PD 型学习控制收敛性问题研究在采用式(4)的学习律下, 当系统学习次数 $k \rightarrow \infty$ 时, 满足什么样的条件下, 输出误差在时间区间 $[0, T]$ 内一致地趋于零^[3-4]。

收稿日期: 2005-03-22

作者简介: 惠阿丽(1975), 女, 在读博士, 主要研究方向为学习控制、图像处理。

本文给出并证明了式(1)中的函数 f 为一类非线性函数时的闭环PD型迭代学习控制的收敛条件:当 $(I + \Gamma_D(t) C(t) D(t)^{-1})$ 的谱半径小于1时,系统收敛到期望输出,且 $(I + \Gamma_D(t) C(t) D(t)^{-1})|_{t=0}$ 的谱半径小于1是系统收敛的必要条件;当 Γ_D, C, D 为常数时, $(I + \Gamma_D C D)^{-1}$ 的谱半径小于1是系统收敛的充分必要条件.

1 预备数学知识

定义 设 X 为Banach空间,有界线性算子 $S: X \rightarrow X$ 的谱为

$$\sigma(s) = \{ \lambda | \lambda I - S \text{ 不是 } 1-1 \text{ 映满的} \},$$

其谱半径定义为

$$\rho(s) = \sup \{ \lambda | \lambda \in \sigma(s) \}.$$

引理1 设常数序列 $\{b_k\}_{k \geq 0}$ 收敛到零,算子 $Q_k: C_r[0, T]$ 满足:

$$\|Q(u)(t)\| \leq M(b_k + \int_0^t \|u(s)\| ds),$$

其中 $M \geq 1$ 为常数, $C_r[0, T]$ 的定义如上,且 r 维向量取最大值范数,设 $P(t)$ 为 $r \times r$ 维连续函数矩阵,令 $P: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$ 为

$$P(u)(t) = P(t) u(t),$$

若 P 之谱半径小于1,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P + Q_n)(P + Q_{n-1}) \dots (P + Q_0)(u)(t) = 0,$$

对于 t 一致地成立.

引理2 假定算子 $Q: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$ 满足下列条件:

$$1) \|Q(x)(t)\| \leq M(q + \int_0^t \|x(s)\| ds), \quad \forall x \in C_r[0, T], \forall t \in [0, T],$$

$$2) \|Q(x)(t) - Q(y)(t)\| \leq M \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds, \quad \forall x, y \in C_r[0, T], \forall t \in [0, T],$$

其中 M, q 为非负常数,则有如下两个结论:

(a) $\forall y \in C_r[0, T]$, 存在唯一的 $x \in C_r[0, T]$, 使得

$$x(t) + Q(x)(t) = y(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

(b) 定义算子 $\bar{Q}: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$ 为

$$\bar{Q}(y)(t) = Q(x)(t), \quad \forall y \in C_r[0, T],$$

其中 $x \in C_r[0, T]$ 是由(a)定义的唯一解,则存在 $M_1 > 0$,使得

$$\|\bar{Q}(y)(t)\| \leq M_1(q + \int_0^t \|y(s)\| ds).$$

2 闭环PD型迭代学习控制收敛性

定理 设被控系统动态方程如式(1),且 $t \in [0, T]$,满足下列条件:

i) $f(t, x)$ 对于 x 满足Lipschitz条件.即存在 $M > 0$,使得

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \in [0, T], \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

ii) 每次运行时的初始状态误差 $\{\alpha_k(0)\}_{k \geq 0}$ 为一收敛到零的序列.

iii) 存在唯一的理想控制 $u_d(t)$,使得系统的状态和输出为期望值.

iv) 在 $t \in [0, T]$ 中 $\mathbf{C}(t)$ 存在, 且 $\mathbf{D}(t), \mathbf{C}(t), \dot{\mathbf{C}}(t)$ 有界.

v) $(\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1}$ 对于 $\forall t \in [0, T]$ 存在.

若取迭代学习律为式(4)所示闭环PD型学习控制, 则对于任意给定的初始控制 $\mathbf{u}_0(t)$ 及每次运行的初始状态 $\mathbf{x}_k(0)$, 所得的序列 $\{\mathbf{x}_k(t)\}_{k \geq 0}, \{\mathbf{y}_k(t)\}_{k \geq 0}, \{\mathbf{u}_k(t)\}_{k \geq 0}$ 对 t 一致地收敛到 $\mathbf{x}_d(t), \mathbf{y}_d(t), \mathbf{u}_d(t)$, 的充分条件为谱半径

$$\rho[\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t)]^{-1} < 1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6)$$

其必要条件为

$$\rho[\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t)]^{-1} \big|_{t=0} < 1, \quad (7)$$

若 $\Gamma_D, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 为常数时, $\rho[(\mathbf{I} + \Gamma_D \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1}] < 1$ 是系统收敛的充分必要条件.

证明 令

$$\mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_d(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}(t)), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad (8)$$

由式(2)、(3)、(4)、(5)、(8)得到

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{f}_1(t, \delta \mathbf{x}_k(t)) + \mathbf{D}(t) \delta \mathbf{u}_k(t), \\ \delta \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}(t) \delta \mathbf{x}_k(t), \\ \delta \mathbf{u}_{k+1}(t) = \delta \mathbf{u}_k(t) - \Gamma_P(t) \delta \mathbf{y}_{k+1}(t) - \Gamma_D(t) \delta \mathbf{y}_{k+1}(t), \end{cases} \quad (9)$$

由上式有

$$\delta \mathbf{y}_{k+1}(t) = \mathbf{C}(t) \delta \mathbf{x}_{k+1}(t) + \mathbf{C}(t) \mathbf{f}_1(t, \delta \mathbf{x}_{k+1}(t)) + \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t) \delta \mathbf{u}_{k+1}(t),$$

于是由条件 iv)、v) 有

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{k+1}(t) &= (\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1} \delta \mathbf{u}_k(t) - \\ &\quad (\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1} (\Gamma_P(t) \mathbf{C}(t) + \Gamma_D(t) \dot{\mathbf{C}}(t)) \delta \mathbf{x}_{k+1}(t) - \\ &\quad (\mathbf{I} + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1} \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{f}_1(t, \delta \mathbf{x}_{k+1}(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

定义算子 $\mathbf{G}_{k+1}: \mathbf{C}_r[0, T] \rightarrow \mathbf{C}_r[0, T]$ 为

$$\mathbf{G}_{k+1}(\delta \mathbf{u}_{k+1})(t) = (\Gamma_P(t) \mathbf{C}(t) + \Gamma_D(t) \dot{\mathbf{C}}(t)) \delta \mathbf{x}_{k+1}(t) + \Gamma_D(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{f}_1(t, \delta \mathbf{x}_{k+1}(t)), \quad (11)$$

其中 $\delta \mathbf{x}_k(t)$, 为式(9)方程 1 当 $\delta \mathbf{u}_k(t)$ 给定时的解.

于是由式(11), 式(10)可以写成

$$\delta \mathbf{u}_{k+1}(t) + (\mathbf{I} + \Gamma_P(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1} \mathbf{G}_{k+1}(\delta \mathbf{u}_{k+1})(t) = (\mathbf{I} + \Gamma_P(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{D}(t))^{-1} (\delta \mathbf{u}_k(t)). \quad (12)$$

下面对 $\mathbf{G}_{k+1}$ 进行估计, 若 $\delta \mathbf{x}_k(t)$ 为式(9)当 $\delta \mathbf{u}_k(t)$ 给定时的解, 则

$$\delta \mathbf{x}_k(t) = \delta \mathbf{x}_k(0) + \int_0^t \mathbf{f}_1(s, \delta \mathbf{x}_k(s)) ds + \int_0^t \mathbf{D}(s) \delta \mathbf{u}_k(s) ds.$$

两边取范数, 则

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{x}_k(t)\| &= \|\delta \mathbf{x}_k(0) + \int_0^t \mathbf{f}_1(s, \delta \mathbf{x}_k(s)) ds + \int_0^t \mathbf{D}(s) \delta \mathbf{u}_k(s) ds\| \leq \\ &\|\delta \mathbf{x}_k(0)\| + \|\int_0^t \mathbf{f}_1(s, \delta \mathbf{x}_k(s)) ds\| + \|\int_0^t \mathbf{D}(s) \delta \mathbf{u}_k(s) ds\|. \end{aligned}$$

由条件 i) 和 Bellman-Gronwall 引理知, 存在 $M_1 > 0$, 使得

$$\|\delta \mathbf{x}_k(t)\| \leq M_1 (\|\delta \mathbf{x}_k(0)\| + \int_0^t \|\mathbf{D}(s) \delta \mathbf{u}_k(s)\| ds),$$

由条件 i)、iv)、v)、式(11)和上式知, 存在常数 $M_2 \geq 1$, 使得

$$\|G_{k+1}(\delta u_{k+1})(t)\| \leq M_2(\|\delta x_{k+1}(0)\| + \int_0^t \|\delta u_{k+1}(s)\| ds). \quad (13)$$

设 $w, v \in C_r[0, T]$, 则

$$\begin{aligned} & \|G_{k+1}(w)(t) - G_{k+1}(v)(t)\| = \\ & \|(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}(\Gamma_P(t)C(t) + \Gamma_D(t)C(t))(x_w(t) - x_v(t)) + \\ & \Gamma_D(t)C(t)(f_1(t, x_w(t)) - f_1(t, x_v(t)))\| \leq \\ & \|(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}\| \cdot \|\Gamma_P(t)C(t) + \Gamma_D(t)C(t)\| \cdot \|x_w(t) - x_v(t)\| + \\ & \|\Gamma_D(t)C(t)\| \cdot \|f_1(t, x_w(t)) - f_1(t, x_v(t))\|, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 x_w, x_v 分别为动态方程(1)在初态 $x_w(0) = x_v(0)$ 控制 u 取 w 和 v 时的解, 故有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x_w(t) - x_v(t)) = f(t, x_w(t)) - f_1(t, x_v(t)) + D(t)(w(t) - v(t)), \\ x_w(0) = x_v(0). \end{cases}$$

由上式可以得到

$$\begin{aligned} \|x_w(t) - x_v(t)\| & \leq \int_0^t \|(f_1(s, x_w(s)) - f_1(s, x_v(s)))\| ds + \\ & \int_0^t \|D(s)\| \cdot \|w(s) - v(s)\| ds. \end{aligned} \quad (15)$$

由条件 ii), iv), 式(8)、(15)及 Bellman-Gronwell 引理知, 存在 $M_3 > 0$ 使得

$$\|x_w(t) - x_v(t)\| \leq M_3 \int_0^t \|w(s) - v(s)\| ds, \quad (16)$$

由式(14)、(16)知, 存在 $M_4 > 0$ 使得

$$\|G_{k+1}(w)(t) - G_{k+1}(v)(t)\| \leq M_4 \int_0^t \|w(s) - v(s)\| ds, \quad (17)$$

由式(13)、(17)可知 G_{k+1} 满足引理 2 的两个条件, 则存在算子 $\overline{G}_{k+1}$, 定义 $\overline{G}_{k+1}: C_r[0, T] \rightarrow C[0, T]$:

$$\overline{G}_{k+1}(u)(t) = (I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}G_{k+1}(u)(t).$$

根据引理 2 存在算子 $\overline{Q}_{k+1}: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$, 使

$$\overline{Q}_{k+1}(y)(t) = \overline{G}_{k+1}(u)(t),$$

其中 u 满足 $u(t) + \overline{G}_{k+1}(u)(t) = y(t)$, 即存在算子 $\overline{Q}_{k+1}$, 使 $\overline{G}_{k+1}(\delta u_{k+1})(t)$ 可用 $\delta u_k(t)$ 表示.

定义算子 $P: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$ 为

$$P(y)(t) = (I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}u(t). \quad (18)$$

定义算子 $Q_{k+1}: C_r[0, T] \rightarrow C_r[0, T]$, 使

$$Q_{k+1}(u)(t) = -\overline{Q}_{k+1}(Pu)(t),$$

则由以上定义的算子可将式(12)写成

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1}(t) &= P\delta u_k(t) - \overline{G}_{k+1}(\delta u_{k+1})(t) = P\delta u_k(t) - \overline{Q}_{k+1}(P\delta u_k)(t) = \\ & P\delta u_k(t) + Q_{k+1}(\delta u_k)(t) = (P + Q_{k+1})(\delta u_k)(t) = \\ & (P + Q_{k+1})(P + Q_k) \dots (P + Q_1)(\delta u_0)(t). \end{aligned} \quad (19)$$

由引理 2 知, 存在常数 $M_s \geq 1$ 满足

$$\|Q_{k+1}(u)(t)\| \leq M_s(\|x(0)\| + \int_0^t \|u(s)\| ds,$$

同理有

$$\|Q_{k+1}(\delta u_k)(t)\| \leq M_s(\|\delta u_k(0)\| + \int_0^t \|\delta u_k(s)\| ds). \tag{20}$$

由式(18)、(19)、(20)及引理1知,若P的谱半径满足

$$\rho[(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}] < 1, \quad \forall t \in [0, T],$$

则 $\delta u_{k+1}(t) \rightarrow 0$ 对于一切 t 成立. 由式(5)可知 $\{u_k(t)\}_{k \geq 0}$ 对 t 一致地收敛到 $u_d(t)$. 且根据式(5)、(8)、(9)及 Bellman-Gronwell 引理知 $\{x_k(t)\}_{k \geq 0}, \{y_k(t)\}_{k \geq 0}$ 对 t 一致地收敛到 $x_d(t), y_d(t)$. 充分性得证.

下面证明必要性:

$$\text{取} \quad \delta x_{k+1}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0,$$

由式(14)、(15)及算子 $Q_{k+1}, \overline{Q}_{k+1}$ 的定义得

$$Q_{k+1}(\delta u_k)(0) = 0, \quad \forall k \geq 0, \delta u_k \in C_r[0, T],$$

故由式(19)和上式得

$$\delta u_{k+1}(0) = P(0)\delta u_k(0) + Q_{k+1}(\delta u_k)(0) = P(0)\delta u_k(0) = (P(0))^{k+1}\delta u_0(0), \quad \forall k \geq 0.$$

若 $\rho[(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}] \geq 1$, 则存在 $\delta u_0(0) \neq 0$ 时, $\delta u_{k+1}(0) = (P(0))^{k+1}\delta u_0(0)$ 不趋近于0. 故只有当 $\rho[(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}] < 1$ 时, $\delta u_{k+1}(0) \rightarrow 0$. 必要性得证.

当 Γ_D, C, D 为常数时, 由以上证明过程显然有 $(I + \Gamma_D CD)^{-1}$ 的谱半径小于1是系统收敛的充分必要条件. 由以上可见, 系统(1)采用闭环PD型学习律, 其收敛性仅与D型学习律的学习增益 Γ_D 有关, 而与P型学习律的学习增益 Γ_P 无关, 且收敛性与状态方程的具体形式 f 无关.

3 实例仿真

例
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2+5t) & -(3+2t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(x_1(t)) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

要求在时间区间[0, 1]内跟踪期望输出 $y_d(t) = 12t^2(1-t)$.

取闭环PD型学习律, 学习增益取值 $\Gamma_P = 15, \Gamma_D = 20$. 由定理给出的收敛条件知:

$$\rho[(I + \Gamma_D(t)C(t)D(t))^{-1}] = \rho[(1 + 20)^{-1}] = \frac{1}{21} < 1.$$

取初始控制 $u_0 = 0$, 图1为系统输出与期望输出, 图2为误差曲线, 由误差曲线可以看出学习到第4次以后输出轨迹已经十分接近期望轨迹(误差 < 0.01).

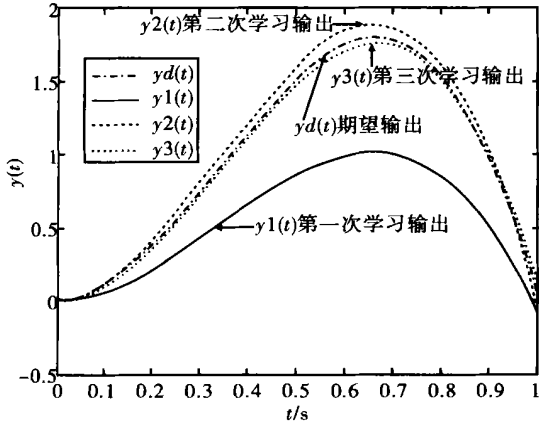


图1 系统输出与期望输出

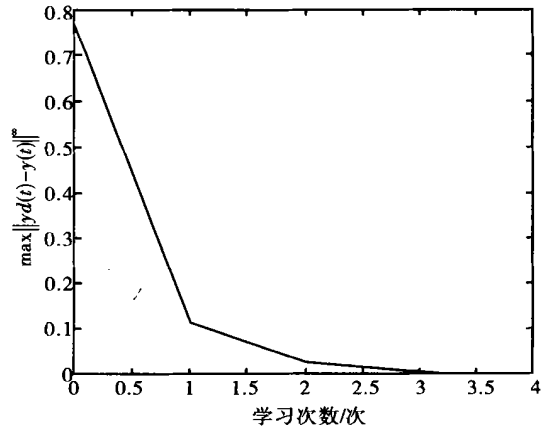


图2 误差曲线

4 结语

证明了非线性系统采用闭环PD型学习律时迭代学习控制的收敛充分条件、必要条件和充分必要条件,并指出其收敛性仅与D型学习律的学习增益有关,而与P型学习律的学习增益无关,且收敛性与状态方程的具体形式无关.最后的具体实例仿真验证了本文的定理.

参考文献:

- [1] 林辉, 王林. 迭代学习控制理论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998: 7-61.
- [2] 林辉, 王林. 非线性系统闭环P型迭代学习控制的收敛性[J]. 控制理论与应用, 1995, 12(6): 742-746.
- [3] 曾南, 应行仁. 非线性系统迭代学习算法[J]. 自动化学报, 1992, 18(1): 168-176.
- [4] 于乃润, 万百五. 工业过程稳态优化中的PD型迭代学习控制[J]. 西北纺织工学院学报, 1995, 9(3): 205-210.

A Closed-Loop PD-Type Iterative Learning Control Scheme for Nonlinear Systems and Its Convergence

HUI A-li¹, ZHENG Jian-ming², SUN Yu¹

(1. Institute of Automatic Engineering, Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China;

2. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: A closed-loop PD-type iterative learning control scheme for nonlinear systems is proposed in this paper, and sufficient and necessary conditions for the convergence of the proposed learning scheme are given. The convergence of the proposed learning scheme is just related to D-type learning gain, and is independent of P-type learning gain and the idiographic form of state functions.

Key words: iterative learning; convergence; nonlinear system; closed-loop PD-type